STETIGE ZUFALLSVARIABLE

(R. Müller, Bundesrealgymnasium Wien 3)

1. Einleitung

Wie angekündigt geht es in diesem Vortrag um die Verwirklichung von 'Angewandter Mathematik' im Schulunterricht. Da die Fachdidaktik oft recht verschiedenes unter 'Angewandter Mathematik' versteht, möchte ich meine Vorstellungen dazu an einem typischen, dem konkreten Unterrichtsgeschehen auf der 12. Schulstufe eines mathematischen Realgymnasiums entnommenen, Beispiel darlegen:

Beispiel 1: Einer statistischen Untersuchung (1) entnimmt man, daß sich die Monatsnettoeinkünfte der Bevölkerung eines bestimmten Landes im Jahr 1980 gemäß

$$\varphi(x) : \begin{cases} \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} & x \in [0,10] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verteilen, wobei x die Einkünfte, gemessen in 1 000 Währungseinheiten, und $\varphi(x)$ die zugehörigen relativen Häufigkeiten beschreibt.

Für den Schüler der 12. Schulstufe ist dies eine Funktion, der man mit dem 'Nullstellen-Extremata-Wendepunkte- ... -Schema' zu Leibe rücken könnte, - bloß, was hat man damit gewonnen ? Will man die der Meldung innewohnende Information extrahieren, so hat man offensichtlich zunächst die "richtige(n) Frage(n) zu stellen"; und diese betreffen wohl kaum die Wendepunkte, sondern lauten wohl eher so:

1a) Wie groß ist das Durchschnittseinkommen ?
1b) Wieviel verdienen die meisten Menschen ?

Dabei ist es zunächst gar nicht klar, ob 1a) und 1b) nicht nach demselben Wert fragen ! Ebensogut sind Fragestellungen der Form

1c) Wieviele Einkommensbezieher sind arm ?

1d) Welchen Anteil am 'Einkommenstopf' haben die Armen ?

1e) Wieviele Einkommensbezieher verdienen mehr als 9 500,-- ?

durchaus naheliegend. Trotzdem passen diese (und die meisten anderen sogearteten) Fragestellungen nicht so recht in das 'Nullstellen-Extremata-Wendepunkte- ... -Schema'.Ja ich behaupte, daß dieses Schema uns oft sogar 'blind' macht für das, wobei es uns helfen sollte, nämlich beim Erkennen des qualitativen Verlaufes der Funktion.

Aus dieser leidvollen Erfahrung heraus entstand der Wunsch, den - vom Lehrplan geforderten - Kurvendiskussionen zumindest im Nachhinein 'Leben einzuhauchen', um so "Mathematik zu betreiben, wie sie wirklich ist" (2). Offensichtlich verlangt die 'Lösung' einer eingekleideten Aufgabe vom Schüler in höherem Maße als sonst, sich dem Prozeß des Mathematisierens zu widmen, also dem Wechselspiel von Verbalisieren und Formalisieren, der Verzahnung von Praxis und Theorie zu genügen. Die Offenheit gegenüber einer breiten Palette möglicher Fragestellungen und die Interpretierbarkeit der Rechenergebnisse eröffnen dem Unterricht die Dimensionen der Wirklichkeitsnähe und der Politischen Bildung. Nicht zuletzt trägt eine solche Vorgangsweise zu einer gelockerten Arbeitsatmosphäre im Mathematikunterricht bei.

Trotzdem dürfen wir nicht übersehen, daß (die meisten) Schüler sich Schemata wünschen. Der Lehrer wird, will er bösen Überraschungen bei Schularbeiten entgehen, diesem Wunsch in gewisser Hinsicht entsprechen müssen. Eine naheliegende Möglichkeit ist die, sich auf eine 'Klasse' von Funktionen zu beschränken, etwa auf die "Wahrscheinlichkeitsdichten und Wahrscheinlichkeitsverteilungen". Der Titel meines Referates spiegelt diese Beschränkung wider. Zur Rehabilitierung kann jedoch angeführt werden, daß so zumindest exemplarisch den didaktischen Zielvorstellungen recht weitgehend entsprochen werden kann.

2. Zur Begriffsgenese: 'Stetige Zufallsvariable'

Sieht man - so wie ich - Theorie im Unterrichtsgeschehen nur zu einem kleinen Teil als 'Mitteilung gesicherten Wissens' an, sondern vielmehr als Ideengerüst und Herleitungsprozeß, so gilt es dem Zustandekommen von $\varphi(x)$ von Beispiel 1 nachzuspüren, insbesonders, da diese Ergebnisse als Ausgangspunkt weitergehender Folgerungen und auch emotionell-bedingter Interpretationen von maßgeblicher Bedeutung sind.

Ausgangspunkt könnte die Befragung einer 'repräsentativen' (3) Stichprobe S gewesen sein, wobei die Befragten entweder ihr Einkommen deklarierten, oder sich gewissen vorgegebenen Klassen selbst zuordneten (4). Im ersten Fall legt man der Beschreibung ein Individualmodell zugrunde, das im vorliegenden Fall, dh., angesichts der sehr großen Zahl verschieden hoher Einkünfte gegenüber dem Stichprobenumfang, sich einer quantitativen Beschreibung weitgehend entzieht. Im Gegensatz dazu drängt das Klassenmodell eine (mögliche) Quantifikation geradezu auf. Die dem Schüler aus der 7. Klasse geläufigen primären Verteilungstafeln und Histogramme zeigen dies sehr deutlich. (5)

Genaugenommen bedeutet das Zeichnen von Histogrammen wegen deren Einbettung in den R^2 bereits eine Kontinuisierung der Zufallsgröße

'Einkommen', die ihrerseits eine Funktion von S in R ist (6). Leider gestattet es die derzeitige Lehrplansituation (7) nicht, schon in der 7. Klasse hier nachzusetzen, und den Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen Modell konsequent zu nützen. Mir scheint dies ein schwerwiegender Mangel zu sein, äußert sich doch die "Kraft des Formalen" oft gerade in der Möglichkeit eines geschickten Modellwechsels. Es wäre ungemein nützlich, könnte man das diskrete und das kontinuierliche Modell nebeneinander abhandeln, in ihren spezifischen Stärken als auch in ihrer gegenseitigen fruchtbringenden Abhängigkeit. Wo sonst bietet sich in ungekünstelter Weise die Möglichkeit eines Vergleiches der 'exakten' Methoden mit den 'numerischen' (eventuell EDV-unterstützten) ? Wo noch kann man das Individual-, Klassen- und Kollektivmodell als Methode fortschreitender Quantifizierung und Parametrisierung erkennen, die Problematik des Modellierens überhaupt als für unser aller Alltagsleben relevant vermitteln ? Hat der Durchschnittsverdienst gemäß Frage 1a) wirklich die ihm zugebilligte Aussagekraft ? Ist es wirklich richtig zu sagen, 21,7 % der Einkommensbezieher verdienen exakt 1 000,-- , wie man in gewohnter Weise durch Einsetzen in den Funktionsterm unschwer erhält ?

Der Schüler sollte erkennen, daß der graphisch leicht durchführbare Übergang vom (unstetigen) Histogramm zum (stetigen) Ausgleichspolygon, und schließlich zur (glatten) Ersatzkurve eine Änderung in der Denkweise, in der Interpretation der Fakten verlangt, sollte erkennen, inwieweit diese im Formalismus ihren Niederschlag findet. Gemeinsam mit der bekannten Problematik um die Begriffe 'Wahrscheinlichkeit' und 'Relative Häufigkeit' (8), sowie aufbauend auf die Integralrechnung erlauben die folgenden verbalen Forderungen unschwer die Genese einer formalen Definition des Begriffes 'Stetige Zufallsvariable':

Forderung 1) Die Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten) werden stets durch eine nichtnegative Funktion beschrieben.

2) Die leichte Vergleichbarkeit verschiedener Untersuchungen (also von verschieden großen Stichproben) verlangt die Normierung zu den relativen Häufigkeiten (Wahrscheinlichkeiten).

3) Das Zumessen der relativen Häufigkeit (Wahrscheinlichkeit) beruht auf dem Vergleich von Flächen.

Definition: (9) Eine Zufallsgröße X heißt stetig, wenn es eine (auf R) def. Funktion φ gibt mit folgenden Eigenschaften:

1) $\varphi(x) \geq 0$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).dx = 1$$

3) $$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x).dx \qquad a \leq b, \quad a,b \in R$$

$\varphi(x)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße X.

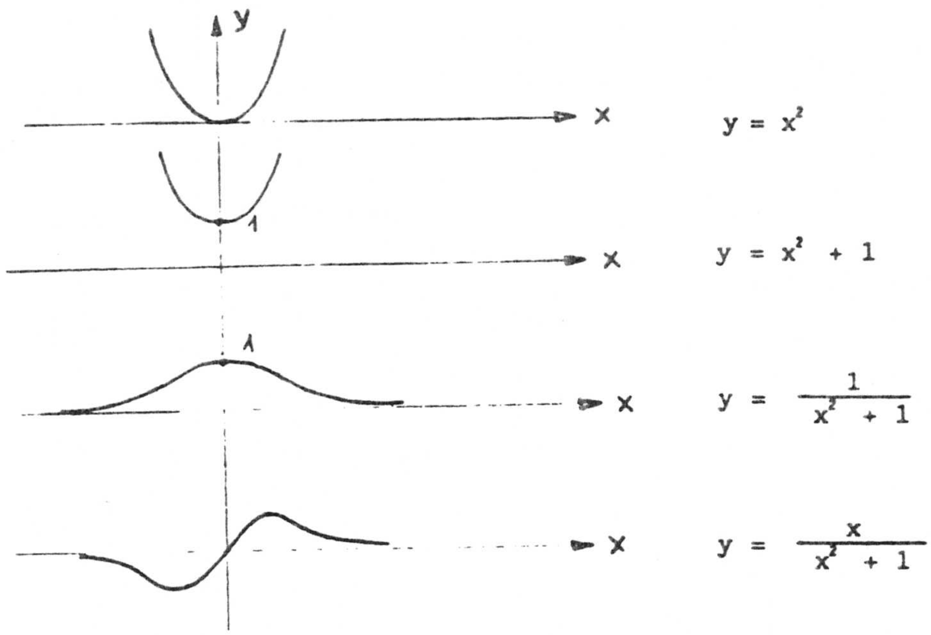
Analog läßt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung als unbestimmtes Integral Φ von φ (als Pendant zur relativen Summenhäufigkeit) definieren. Es ist eine lehrreiche und vom Schüler durchaus allein bewältigbare Aufgabe, die Beschränktheit und Monotonie von Φ aus den Eigenschaften von φ herzuleiten.

3. Zur unterrichtspraktischen Durchführung

Wie bereits erwähnt, dient Beispiel 1 als Gerüst zur Entwicklung der Lehrinhalte. Ein erster Schritt besteht darin, den Verlauf der Kurve

$$y = a \cdot \frac{x}{x^2 + 1}$$

qualitativ in den Griff zu bekommen. Ich habe meine Schüler stets dazu angehalten, solche Funktionen möglichst schrittweise zu entwickeln (10),



wobei die multiplikative Konstante $a = \frac{1}{\ln 10}$ für den qualitativen Verlauf unerheblich ist. Unter Beachtung des Definitionsbereiches erhält man praktisch ohne Rechnung eine durchaus aussagekräftige Kurve:

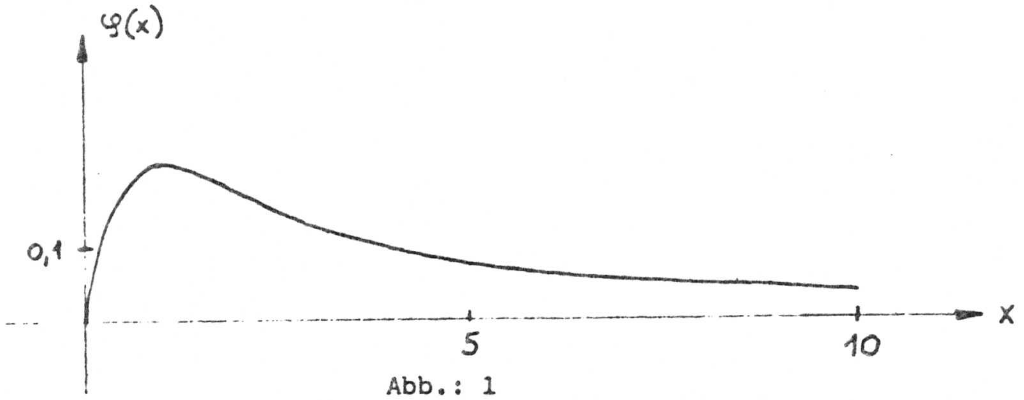


Abb.: 1

An dieser Stelle ist es durchaus angebracht, von kleinen Kurvenretuschen (11) bis hin zur völligen Umgestaltung des Bildes den Formenreichtum von Dichtefunktionen durchzuspielen und zu interpretieren (12). Hier ist Zeit, die (Voraus-)Urteilsfähigkeit einer heilsamen, kritischen Prüfung zuzuführen. Gleichzeitig erfahren die früher mechanisch abgehandelte Bestimmung von Extremwerten und die Untersuchung zur Symmetrie etc. eine nachträgliche Rechtfertigung. Man erkennt darin den Versuch, den qualitativen Verlauf der Kurve durch einige wenige Größen zu charakterisieren. Damit leitet man auch unschwer zu jenen Parametern über, welche in der diskreten Statistik von Bedeutung sind: Zum Mittelwert (Erwartungswert), zur Varianz und ähnlichen Lage- bzw. Dispersionsparametern. Die folgende Tabelle stellt die wichtigsten Parameter im diskreten bzw. kontinuierlichen Modell gegenüber:(13)

Mean	$\overline{x} = \sum_{k=1}^{m} r(x_k).x_k$ $1 \leq m \leq \lvert S \rvert$	$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).x.dx$
Modus	H: $r(H) = \max r(x_k)$	$\varphi(H) = \max \varphi(x)$
Median	z: $\begin{cases} x_{\frac{\lvert S \rvert+1}{2}} & \lvert S \rvert \in N_u \\ \frac{1}{2}.(x_{\frac{\lvert S \rvert}{2}} + x_{\frac{\lvert S \rvert}{2}+1}) & \lvert S \rvert \in N_g \end{cases}$	$0,5 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).dx$
Varianz	$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{m} r(x_k).(x_k - \overline{x})^2$	$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).(x-\mu)^2.dx$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).x^2.dx - \mu^2$

Im Unterricht habe ich mich stets darauf beschränkt, diese Formeln mittels Analogieschlüssen herzuleiten. Besonders wichtig erschien mir jedoch das Verständnis für diese Formeln. So sollte die Vorraussetzung einer geordneten Stichprobe für die Berechnung von z im diskreten Fall genauso selbstverständlich sein wie die Interpretation des Modus als lokales Extremum oder Randextremum. Insbesonders bei der Berechnung des Erwartungswertes sollte dem Schüler die formale Gleichheit der Berechnung des arithmetischen bzw. gewogenen Mittels, der RICHMANNschen Mischungsregel sowie der ihm aus der Integralrechnung geläufigen Formel für den

Schwerpunkt eines ebenen Flächenstückes bewußt (gemacht) werden !

Anhand der obigen Formeln lassen sich die Fragen aus Beispiel 1 wie folgt beantworten:

ad 1a) $\mu = \frac{1}{\ln 10} \int_0^{10} x . \frac{x}{x^2 + 1} . dx \approx 3{,}7$

dh., der Durchschnittsverdienst ist ungefähr 3 700,-- .

ad 1b) $\varphi(H) = 0 \Longrightarrow H = 1$

dh., das häufigste Einkommen ist 1 000,-- .

ad 1c) Nimmt man etwa 500,-- als Armutsgrenze an, so erhält man

$$\int_0^{0,5} \varphi(x) . dx \approx 0{,}048$$

dh., fast 5 % der Einkommensbezieher gelten als arm.

ad 1d) $\int_0^{0,5} x . \varphi(x) . dx \approx 0{,}016$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit $\int_0^{10} x . \varphi(x) . dx \approx 3{,}7$, was nun auch als 'Gesamteinkommen' interpretiert werden kann, so erhält man: Die Armen haben am Gesamteinkommen einen Anteil von etwa 4,3 Promille.

ad 1e) Analog zu 1c) und 1d) erhält man: 2,2 % der Einkommensbezieher verdienen mehr als 9 500,-- . Ihr Anteil am Gesamteinkommen ist etwa 5,8 % .

Das starke Auseinanderklaffen von häufigstem und durchschnittlichem Einkommen zeigt, daß e i n Lageparameter alleine nur eine sehr geringe Aussagekraft hat. Es erweist sich daher als günstig, auch den Zentralwert z zur Charakterisierung heranzuziehen:

1f) 50 % der Einkommensbezieher verdienen weniger als ... ?

ad 1f) $0{,}5 = \int_0^{z} \varphi(x) . dx \Longrightarrow \frac{1}{2 . \ln 10} . \ln |z^2 + 1| = 0{,}5 \Longrightarrow$

$z^2 + 1 = 10 \Longrightarrow z = 3$

dh., 50 % der Einkommensbezieher verdienen weniger als 3 000,-- .

Die Streuung schließlich liefert ein Maß dafür, inwieweit die Form von $\varphi(x)$ von tafelbergförmiger oder spitzer Gestalt ist.

1g) Berechne, wie stark die Einkommen um den Mittelwert μ streuen !

ad 1g) $\sigma^2 = \int_0^{10} x \cdot \varphi(x).dx - \mu^2 \Rightarrow \sigma \approx 2,65$

Genauso könnte man zu etwas komplexeren Fragestellungen übergehen, etwa:

1h) Wieviel Prozent der Einkommensbezieher umfaßt jene Gruppe von 'Gutverdienern', welche 50 % des Gesamteinkommens für sich beanspruchen ?

ad 1h) Aus dem Ansatz $0,5 \cdot \int_0^{10} x.\ \varphi(x).dx = \int_\xi^{10} x.\ \varphi(x).dx$

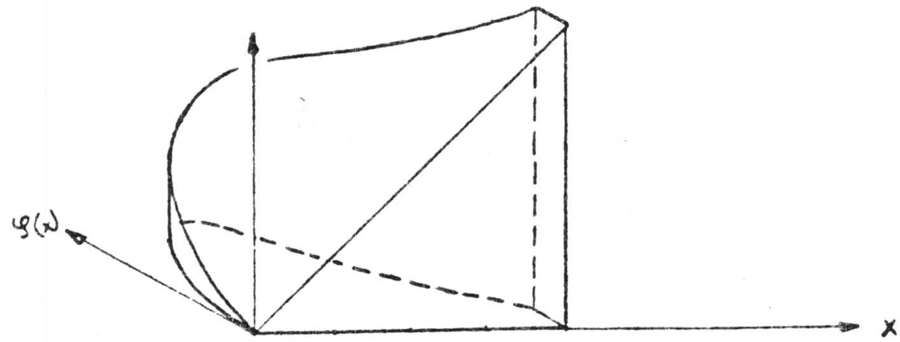
erhält man eine (nicht elementar lösbare) Gleichung der Form:

$$\arctan \xi = \xi + c \;;$$

die graphisch leicht bestimmbare Lösung lautet $\xi \approx 5,66$

Wegen $\int_{5,66}^{10} \varphi(x).dx \approx 0,24$ erhält man die Lösung: Die 'oberen' 24 % der Einkommensbezieher, - das sind jene, welche mehr als 5 660,-- verdienen -, teilen die Hälfte des 'Kuchens' unter sich auf.

Erfahrungsgemäß wird der Anteil der 'Reichen' am Gesamteinkommen trotz (oder gerade aufgrund von ?) Abb.: 1 vom Schüler unterschätzt. Sicher ist es Aufgabe des Mathematikunterrichtes, solchen visuellen 'Irrtümern' zu begegnen; im vorliegenden Fall ist dies auch auf visuellem Weg leicht möglich, wenn man die Gewichtung von $\varphi(x)$ mit x anhand (des Volumens) einer Zylinderfläche veranschaulicht:



4. Einige Tips für die Beispielerstellung

Manchem mag das Thema 'Einkommensverteilung' gerade im Hinblick auf die derzeitige Situation, die durch Reallohnverluste und 'Privilegienabbau' gekennzeichnet ist, zu brisant sein. Insbesonders könnte - nicht ganz unberechtigt - eingewendet werden, daß 'fiktive' Angaben u n l a u t e r sind, da sie, je nach Belieben, Emotionen auf- oder abwiegeln helfen !

Daher will ich einige 'unverfängliche' - nichtsdestoweniger diskussionswürdige - Ideen für Beispiele präsentieren, wie sie in meinem Unterricht Eingang gefunden haben:

<u>Beispiel 2:</u> Die Länge der Schulwege (gemessen in km) zu einer bestimmten Schule im 3. Bezirk unterliegt der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\varphi(x) = \frac{1}{108} . x . (x - 6)^2$$

2a) Ermittle den 'sinnvollen' Definitionsbereich !

2b) Welche Schulweglänge ist die wahrscheinlichste ?

2c) Berechne die durchschnittliche Schulweglänge samt Streuung !

<u>Beispiel 3:</u> Eine Untersuchung über den Benzinverbrauch von Autos, beschrieben durch die stetige Zufallsvariable X (gemessen in l/100 km) hat folgende Wahrscheinlichkeitsdichte ergeben:

$$\varphi(x) = \frac{3}{10} \cdot \frac{x^2 - 15x + 50}{x - 14}$$

3a) Ermittle den 'sinnvollen' Definitionsbereich !

3b) Zeige, daß eine Dichte vorliegt !

3c) Berechne den wahrscheinlichsten Verbrauch !

3d) Berechne den Durchschnittsverbrauch !

3e) Wieviel Prozent der Wagen haben einen extrem niedrigen bzw. extrem hohen Verbrauch (definiert als Werte außerhalb des Streubereiches) ?

Beispiel 4: Aus einer Untersuchung geht hervor, daß die Wahrscheinlichkeit für die Bezahlung der Rechnung x Tage nach Rechnungserhalt sich wie folgt verteilt:

$$\varphi(x) = \frac{1}{10\pi} \cdot \frac{x}{10} \cdot \sin\frac{x}{10}$$

4a) Wie lange ist der $\varphi(x)$ zugrunde gelegte Zeitraum ?

4b) Die eingeräumte Zahlungsfrist sei 30 Tage; wieviel Prozent der Kunden halten sich nicht daran ?

4c) Wieviele Tage muß man durchschnittlich bis zur Rechnungsbegleichung warten ?

Beispiel 5: Die 'Altersstruktur' einer Fischpopulation genügt

$$\varphi(x) = 3.e^{-3x} \qquad x \in [0, \infty[$$

wobei x das Alter in Jahren angibt.

5a) Berechne das Durchschnittsalter !

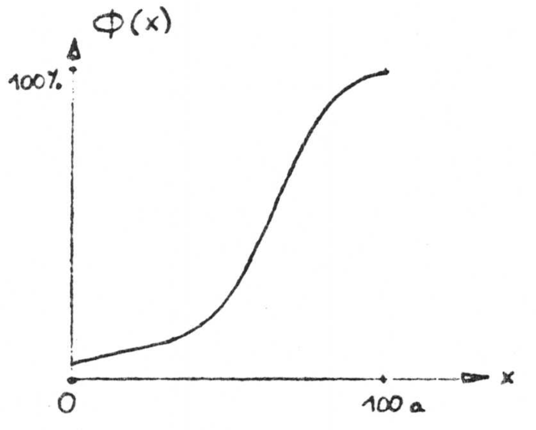
5b) Berechne das häufigste Lebensalter !

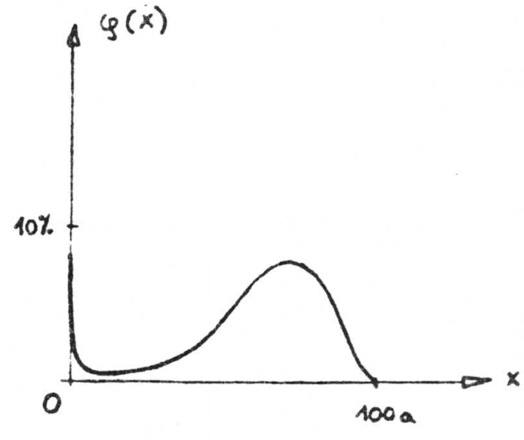
5c) 50 % aller Fische sind jünger als ... ?

5d) Wieviel Prozent der Fische werden älter als 3 Jahre ?

Dabei fällt auf, daß stets $\varphi(x)$ vorgegeben ist. Dies muß nicht so sein, wie die folgende Beispielsskizze zeigen soll:

$\Phi(x)$ sei die relative Summenhäufigkeit der Gestorbenen (14), ein Zusammenhang, wie er im Versicherungswesen unabdingbar ist. Der qualitative Verlauf wird durch die folgende Figur illustriert:





$\varphi(x)$ kann man durch Differenzieren daraus gewinnen. Da Differenzieren leichter ist als Integrieren, könnte man versucht sein, stets $\Phi(x)$ vorzugeben. In der Praxis ist dies auch häufig der Fall. Im Schulunterricht habe ich allerdings die Erfahrung gemacht, daß die Schüler sich mit der Vorgabe von $\varphi(x)$ leichter taten; aber vielleicht ist dies bloß liebe Gewohnheit ? .

Andererseits könnte man überhaupt versucht sein, weder $\varphi(x)$ noch $\Phi(x)$ vorzugeben, sondern etwa die primäre Verteilungstafel. Obwohl man solcherart den Unterricht um eine wichtige Dimension des Mathematisierens bereicherte, ist davon abzuraten. Dies ist leicht einzusehen, wenn man sich vor Augen hält, auf welche Art und Weise der Schüler den Term einer g e e i g n e t e n Ersatzfunktion finden sollte ! Erfahrungsgemäß besitzt kein Schüler jenes Repertoire von Kurventypen, aus denen er eine passende, dh., hinreichend genaue und leicht zu handhabende, Ersatzfunktion auswählen könnte. Noch weniger ist ihm die geschickte Superposition einfacher Grundtypen geläufig. Selbst wenn es ihm gelänge, hätte man Probleme im Unterricht; der Lehrer stünde vor dem Dilemma, lauter verschiedene und somit verschieden gute Approximationen nachrechnen und beurteilen zu müssen, - was angesichts der derzeitigen Prüfungsvorschriften sicher keine angenehme Situation darstellt.

Aus diesem Mangel heraus wäre man wiederum gezwungen, dem Schüler 'sichere' Methoden zur Hand zu geben, um geeignete Funktionen finden zu können. Die Mathematik kennt zwei Wege:

Der erste führt in Richtung Regressionskurven bzw. Reihenentwicklungen (Interpolationspolynome sind wenig geeignet).

Der zweite besteht darin, die für das Zustandekommen der Urlistenwerte maßgeblichen Voraussetzungen zu prüfen, also zu untersuchen, ob ein BERNOULLI-Experiment, ob ein POISSON-Prozeß vorliegt, oder ob der zentrale Grenzwertsatz Anwendung finden kann. Dieser Weg führt offensichtlich zu den bekannten Standardverteilungen, von denen eine,nämlich die 'Exponentialverteilung', in Beispiel 5 behandelt wurde. Die weitaus wichtigste, die 'Normalverteilung', läßt sich in unserem Schema weniger gut abhandeln, weil sie sich bekanntlich einer elementaren Integration entzieht. Gleiches gilt für die t-, F- und viele andere wichtige Verteilungen (15).

Offensichtlich würde all das den Rahmen des Lehrplanes bei weitem sprengen. Insoferne müssen meine theoretischen Ausführungen und Beispiele als d a s angesehen werden, was sie sind, - das Ergebnis jenes unumgänglichen Kompromisses zwischen Erstrebenswertem und Machbarem, den jeder Lehrer tagtäglich aufs Neue schließen muß.

FUSSNOTEN

(1) Das vorliegende Beispiel ist fiktive, wenn auch der Typ der Kurve den realen Verhältnissen entspricht. Die Entscheidung für diese Bevorzugung von Wirklichkeitsnähe gegenüber der Wirklichkeitstreue bedürfte einer eingehenden Diskussion. Der korrekte Normierungsfaktor $2/\ln 101$ fiel dem Bestreben nach 'schönen' Ergebnissen zum Opfer; mit dem angegebenen Normierungsfaktor $1/\ln 10$ erhält man $z = 3$, verletzt jedoch die Forderung 2) an eine Dichte geringfügig. Die Angabe einer oberen Grenze (hier 10) ist notwendig, weil das uneigentliche Integral von $\varphi(x)$ an den Grenzen von 0 bis ∞ nicht existiert.

(2) Vergleiche L2, S. 10

(3) Vergleiche L1, S. 179-181

(4) Vergleiche L1, S. 30-38
Der Diskussion der Tatbestände aus (3) und (4) sollte im Mathematikunterricht unbedingt Raum gegeben werden.

(5) Vergleiche L1, S. 51-57

(6) Vergleiche L1, S. 17, sowie L5

(7) Derzeit ist die diskrete Statistik und Teile der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der 7. Klasse, die Integralrechnung in der 8. Klasse vorgesehen. Mir schiene die umgekehrte Reihenfolge zweckmäßiger zu sein. Vergleiche hiezu L5.

(8) Vergleiche L7

(9) Vergleiche L6, S. 160

(10) Aus meiner langjährigen Erfahrung als EDV- und Mathematiklehrer heraus bin ich der Meinung, daß man auch beim Einsatz von Computern im Mathematikunterricht auf diese schrittweise-qualitative Entwicklung n i c h t verzichten sollte !

(11) Bei der Variation (der Parameter) eines Kurventyps ist der Computer hingegen eine große Hilfe.

(12) Vergleiche L1, S. 66-68

(13) Vergleiche L3, S. 134

(14) Die zugehörigen Werte kann man einer 'Sterbetafel', vergleiche etwa L8, S. 88, entnehmen.

(15) Vergleiche L6, sowie L3 S. 21-54 und S. 115-146, sowie L4, S. 197ff.

LITERATURVERZEICHNIS

L1 CLAUSS, G. - EBNER, H.: Grundlagen der Statistik
Verlag Harri Deutsch, 1975[2]

L2 FISCHER, R. - MALLE, G.: Fachdidaktik Mathematik
Institut für Erziehungswissenschaften, Wien 1980

L3 HARFF, P. - STÖCKMANN, M.: Wirtschaftsstatistik
Wirtschaftsverlag Orac, 1977

L4 HINDERER, K.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie
Verlag Springer, 1972

L5 LAUB, J. u.a.: Lehrbuch der Mathematik, Bd. 7, 8
Verlag HPT, verschiedene Auflagen

L6 MAIBAUM, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung
Verlag Volk und Wissen, 1975[2]

L7 MÜLLER, R.: Bedingte Wahrscheinlichkeit
in: Didaktikreihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft,
Heft 7, 1982

L8 WAAGE, E.: Vierstellige Logarithmen und Zahlentafeln für den
Mathematikunterricht
Verlag HPT, 1966[7]